Volumenerhaltende Interpolation aus polygonbezogenen Daten in regelmäßigen und unregelmäßigen Netzen

Technischer Bericht

Wolf-Dieter RASE
wolf.rase@t-online.de

Zusammenfassung

Bei der Konstruktion einer kontinuierlichen Oberfläche müssen die Eigenschaften der ursprünglichen Daten erhalten bleiben, bei flächenbezogenen Daten das Volumen über den Bezugseinheiten. Das Verfahren der pyknophylaktischen Interpolation garantiert die Volumenerhaltung. In manchen Anwendungsfällen ist die ursprüngliche Version des Verfahrens mit einem regelmäßigen Gitter als Oberflächenmodell nur suboptimal, etwa wenn der Verlauf der ursprünglichen Grenzlinien genau eingehalten werden muss, oder bei sehr unterschiedlichen Flächengrößen der Polygone. Eine Lösung ist die Verwendung eines unregelmäßigen Dreiecksnetzes (TIN) als Datenmodell für die Oberfläche. Die Grenzen der Polygone sind identisch mit Kanten im Dreiecksnetz. In die Polygone werden zusätzliche Punkte eingefügt, die für die Konstruktion einer glatten Oberfläche notwendig sind. Die Verdichtung erfolgt mit Verfahren für die Erzeugung von Netzen mit vorgegebenen Qualitätseigenschaften (*quality meshes*). Zur Anpassung an die geometrischen Eigenschaften von unregelmäßigen Dreiecksnetzen sind kleinere Modifikationen des ursprünglichen Algorithmus mit regelmäßigem Gitter erforderlich.

1 Flächenbezogene Indikatoren und ihre Visualisierung

Die überwiegende Anzahl von Indikatoren zur Messung regionaler Disparitäten wird aus Daten berechnet, die auf eine flächenhafte Bezugseinheit aggregiert sind. Die demographischen, sozialen und wirtschaftlichen Eigenschaften von Personen, Haushalten, Wohnungen oder Firmen werden für flächenhafte Bezugseinheiten auf allen Ebenen der Erhebungs- bzw. Verwaltungshierarchie aufsummiert. Die räumliche Verteilung der Indikatoren wird überwiegend mit Choroplethenkarten visualisiert. Die Bezugsflächen werden mit einer Farbe oder einem Muster gefüllt, die einen Bereich (eine Klasse) im Variablenraum repräsentieren. Durch die Reduktion auf eine überschaubare Anzahl von Klassen und die Darstellung der räumlichen Verteilung in den Bezugsflächen wird die Erfassung der räumlichen Muster und der Disparitäten erleichtert. Choroplethenkarten haben den Vorteil, dass sie einfach herzustellen sind und ohne besondere Vorkenntnisse und Erfahrungen interpretiert werden können.

Auf der anderen Seite gehen durch die Generalisierung auf wenige Klassen wichtige Informationen verloren. Die absolute Größe des Indikators für die einzelnen Bezugsflächen ist nicht direkt erkennbar, auch aufgrund der zweidimensionalen Darstellung. Der Vergleich der Indikatorwerte bzw. der Höhenwerte für die Bezugseinheiten wird erst möglich durch die Einbeziehung von Darstellungsformen, die den Eindruck der dritten Dimension vermitteln, etwa die simulierte Beleuchtung, perspektivische Darstellungen, „Echt-3D-Karten“ oder 3D-Modelle (GRÜNDEMANN et al. 2006, RASE 2003, 2007, BUCHROITHNER 2007).

Soziale, ökonomische und insbesondere naturräumliche Vorgänge auf der Erdoberfläche machen nicht an den Grenzen administrativer Einheiten halt. Die abrupten Übergänge, die zwischen zwei benachbarten Bezugseinheiten auf einer Choroplethenkarte auftreten können, werden in erster Linie durch die Art der Datenerhebung und die Darstellung verursacht und geben nicht das tatsächliche Bild der Verteilung wieder. Die Information über die Verteilung innerhalb der Bezugseinheit ist in den Ausgangsdaten nicht enthalten. Die Bevölkerung eines Kreises ist zum Beispiel nicht homogen über die Fläche verteilt und macht keine starken Sprünge an den Grenzen, wie es die Choroplethenkarte suggerieren könnte. Eine Darstellung der Verteilung als kontinuierliche Oberfläche hat die gleiche Berechtigung wie eine 3D-Choroplethenkarte, unter der Voraussetzung, dass das Volumen über den Bezugseinheiten proportional zum Indikatorwert ist, genauso wie das Volumen der Pris-

men in der 3D-Choroplethenkarte. Daraus folgt, dass der Durchschnitt aller Höhenwerte in einer Einheit, die Einwohnerdichte in diesem Beispiel, konstant bleibt.

Kontinuierliche Oberflächen in dreidimensionaler Darstellung mit simulierter Beleuchtung sind besser erfassbar als 3D-Choroplethenkarten aus Prismen mit zur Grundfläche parallelen Oberseiten (Abb. 1). Wahrscheinlich ergeben die durch die simulierte Beleuchtung vielfach abgestuften Farbtöne in der interpolierten Oberfläche ein besseres mentales Bild als die Prismen mit den zur Bezugsebene parallelen Deckeln, deren Helligkeitswert sich aufgrund der gleichen Exposition zur Lichtquelle nicht verändert.

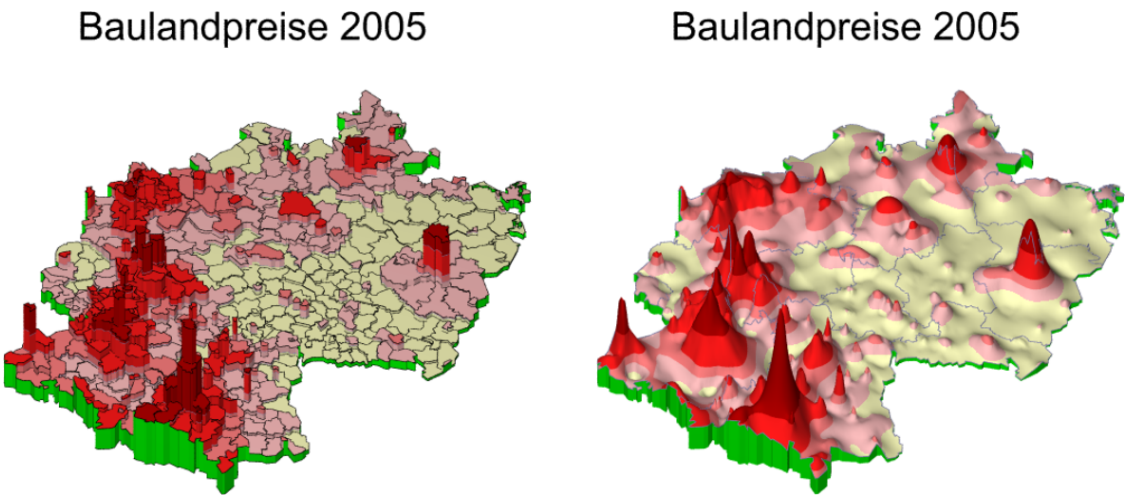


Abb. 1 Dreidimensionale Choroplethenkarte (links) im Vergleich mit einer stetigen Oberfläche aus den gleichen Daten (rechts), interpoliert mit Erhaltung des Volumens

In einer stetigen Oberfläche sind die Grenzen der Bezugseinheiten auch nicht mehr direkt erkennbar, was in manchen Verhandlungssituationen in der großräumigen Planung ein Vorteil sein kann, insbesondere auch über die nationalen Grenzen hinaus. Das Fehlen sichtbarer Sprünge an den Grenzen kann auch der graphische Ausdruck der Unsicherheit und Fehlerwahrscheinlichkeit in den dargestellten Daten sein, etwa bei Modellrechnungen und Prognosen.

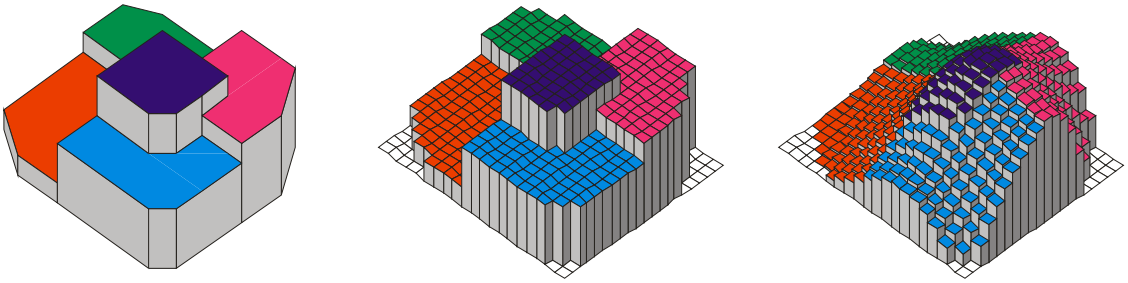
Die Eigenschaften der Ausgangsdaten sollen in der interpolierten Oberfläche erhalten bleiben. Für die Interpolation aus unregelmäßig verteilten Punkten gilt normalerweise, dass die Oberfläche durch die Datenpunkte gehen soll. Ausnahmen sind Ausgleichsrechnungen bei Messfehlern oder die Berechnung von räumlichen Trends, etwa mit bivariaten Polynomen (RASE 1998). Bei flächenhaften Bezugseinheiten gibt es keine Bezugspunkte, durch die die Oberfläche gehen soll. Als zu erhaltende Eigenschaft wird in diesem Fall das Volumen über der Bezugseinheit betrachtet. Das Interpolationsverfahren muss die Erhaltung des Volumens sichern, mit einer akzeptablen Fehlermarge. Die Höhe der Oberfläche kann innerhalb eines Polygons variieren, der Durchschnitt aller z-Werte in einem Polygon bleibt aber konstant.

2 Interpolation in einem regelmäßigen Gitter

Zur Berechnung einer stetigen Oberfläche aus flächenbezogenen Daten hat Waldo Tobler ein Verfahren entwickelt, das er *pyknophylaktische Interpolation* nannte (TOBLER 1979). Diese volumenerhaltende Interpolation – so die Bedeutung der griechischen Namensbestandteile *pyknos* und *phylax* – ist wie viele andere Optimierungsrechnungen ein iteratives Verfahren. Nach einem Initialisierungsschritt wird eine Iteration durchgeführt. In jedem Iterationszyklus wird das Gitter geglättet und anschließend die Erhaltung des Volumens für jede Bezugseinheit kontrolliert und durch Korrektur der z-Werte korrigiert. Die Volumenerhaltung ist also ein Bestandteil des Verfahrens und nicht ein mehr oder weniger zufälliges Ergebnis der Interpolation.

In Abbildung 2 ist der grobe Ablauf an drei Zuständen eines Test-Datensatzes dargestellt. Die Schritte „Glättung“ und „Korrektur“ (Abschnitte 2.2 und 2.3) werden so oft wiederholt, bis eine ak-

zeptable stetige Oberfläche entstanden ist. Mehrere Kriterien für den Abbruch der Iteration können vom Anwender gesetzt werden.



a) Prismen b) Rechteckige Säulen c) Geglättete Oberfläche

Abb. 2 Rasterung und Glättung der Prismen über der Grundfläche der Bezugseinheiten

2.1 Initialisierung

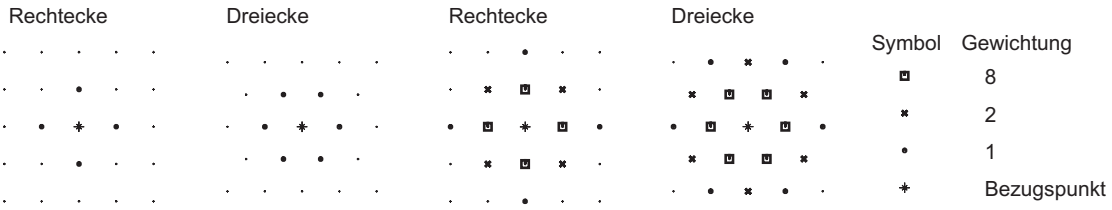
Über das Untersuchungsgebiet wird ein regelmäßiges Gitter aus Rechtecken oder Dreiecken mit wählbarer Maschenweite gelegt und jeder Gitterpunkt einem Bezugspolygon zugeordnet. Als Höhenwert des Gitterpunktes wird die Höhe des zugeordneten Polygons eingesetzt. Bei absoluten Werten, etwa die Gesamtzahl der Einwohner, wird die Höhe durch Division durch die Polygonfläche berechnet. Liegt nur die Dichte vor, wird ein fiktives Volumen durch Multiplikation mit der Fläche verwendet. Es entsteht eine virtuelle dreidimensionale Choroplethenkarte aus rechteckigen oder sechseckigen Säulen (letztere beim Dreiecksnetz) mit großen Sprüngen im Höhenwert an den Grenzen benachbarter Flächen.

2.2 Glättung der Oberfläche

Die Oberfläche wird geglättet, indem für jeden Punkt des Gitters der Durchschnitt aus den Nachbarn im Gitter berechnet wird. Tobler nutzt zwei Möglichkeiten für die Berechnung des Durchschnitts aus den z-Werten:

- die unmittelbaren Nachbarn (Abb. 3a);
- die Nachbarn der Nachbarn, deren z-Werte nach der Entfernung vom Bezugspunkt gewichtet werden (Abb. 3b).

TOBLER (1979) hat die Verwandtschaft des ersten Verfahrens mit der Laplace-Gleichung, die des zweiten Verfahrens mit der biharmonischen Gleichung hergeleitet. Andere Verfahren zur Mittelwertbildung sind denkbar, etwa die Interpolation mit dem modifizierten Shepard-Algorithmus (RENKA 1988) oder die Ausgleichsrechnung mit lokalen Polynomen. Der Rechenaufwand ist im Vergleich mit den beiden Mittelwertbildungen relativ hoch und hat wahrscheinlich keine wesentlichen Vorteile gegenüber den einfachen Verfahren.



a) Unmittelbare Nachbarn b) Nachbarn der Nachbarn

Abb. 3 Durchschnittsberechnung für die Punkte im regelmäßigen Rechteck- und Dreiecksgitter

2.3 Korrektur der z-Werte zur Volumenerhaltung

Nach der Glättung hat sich das Volumen über der Bezugsfläche verändert. Die Höhe der Gitterpunkte wird so korrigiert, dass das Volumen über jedem Polygon so weit wie möglich dem vorgegebenen Wert (Soll) des Volumens oder der durchschnittlichen Höhe entspricht. Der Differenzbetrag zwischen Ist und Soll jedes Polygons wird anteilig auf die Punkte im Polygon verteilt, so dass sich das Ist-Volumen während der Iteration allmählich dem Soll-Volumen annähert. Folgende Rechenschritte werden ausgeführt:

Für jeden Gitterpunkt wird ein Angleichungsbetrag berechnet.

$$\delta_{ij}^{*} = zneu_{ij} - zalt_{ij}$$

$zneu$ Durchschnittswert aus den z-Werten der Nachbarn

$zalt$ alter z-Wert

Für die Korrektur der z-Werte ist es zweckmäßig, nur ein Viertel des Differenzbetrages zu verwenden. Dadurch werden die Korrekturbeträge in einem Iterationsschritt nicht zu groß. Durch die allmähliche Annäherung an den optimalen Wert werden Oszillationen um den Sollwert vermieden.

$$\delta_{ij} = \delta_{ij}^{*} / 4$$

Für jede Bezugseinheit k wird die Summe s^* der korrigierten Korrekturbeträge berechnet und der Durchschnittswert dem Gitterpunkt zugeordnet.

$$s_k^{*} = \sum \delta_{ij}$$

Für jede Bezugseinheit wird ein Betrag für den Abzug vom z-Wert berechnet, damit der Durchschnitt der Korrekturen für jede Einheit gleich 0 bleibt.

$$s_k = -s_k^{*} / A_k$$

A_k Flächeninhalt des Polygons k

Die Korrekturbeträge werden auf jeden Gitterpunkt angewendet und die Summe der z-Werte für jede Bezugseinheit k berechnet.

$$z_{ij} = z_{ij} + \delta_{ij} + s_k$$

$$zd_k = \sum_k z_{ij}$$

Die Summe (gleich Volumen bei der Grundfläche 1 für jede Säule) wird mit den ursprünglichen Werten verglichen und die Differenz des Höhenwertes für jede Einheit berechnet.

$$l_k = \left(V_k - zd_k\right) / A_k$$

V_k Original-Volumen über Polygon k

Der Differenzbetrag wird auf jeden Gitterpunkt addiert.

$$z_{ij} = z_{ij} + l_k$$

Schritte 2.2 und 2.3 werden solange wiederholt, bis das Kriterium für den Abbruch der Iteration erfüllt ist. In Abbildung 4 ist der Gang der Iteration mit Angabe der prozentualen Rauheit (RF) für einen Testdatensatz dargestellt. Das Maß für die Rauheit ist die Abweichung der Oberfläche von der idealen Stetigkeit in Prozent.

2.4 Kriterien für den Abbruch der Iteration

Die Glättung und die Korrektur der z-Werte werden so lange fortgesetzt, bis die vorgegebene Anzahl der Iterationsschritte erreicht ist. Das kann bei einem dichten Gitter sehr viel Rechenzeit in Anspruch nehmen. Deshalb ist es sinnvoll, die Iteration beim Erreichen von vorgegebenen Schwellenwerten für bestimmte Messwerte abzubrechen.

Ein Kriterium ist zum Beispiel die „Rauheit“ der Oberfläche, gemessen durch den Durchschnitt der quadratischen Abweichungen *v* zwischen den neuen z-Werten und den z-Werten aus der vorigen Iteration:

$$v = \frac{\sum (zneu_{ij} - zalt_{ij})^2}{n}$$

$zneu_{ij}$	neue *z*-Werte aller Punkte, die in einem Polygon liegen
$zalt_{ij}$	alte *z*-Werte aus der vorigen Iteration
n	Anzahl der Punkte, die in einem Polygon liegen

Der Wert von v ist abhängig vom Betrag der z-Werte in der Oberfläche. Die normierte Summe der Abweichungsquadrate in Prozent ist besser geeignet zum Vergleich der Glätte verschiedener Oberflächen (Formel nach HARBAUGH und MERRIAM 1968):

$$p = 100 * \left[\frac{\sum (zneu_{ij} - zalt_{ij})^2}{\sum \left(zneu_{ij} - \overline{z} \right)^2} \right]$$

$\overline{z}$	arithmetisches Mittel aller $zneu_{ij}$

Ein anderes Kriterium ist das Verhältnis zwischen dem Istwert und dem Sollwert der Volumina oder der Höhenwerte, im Idealfall der Wert 1 oder die relative Abweichung von 0 Prozent. Denkbar ist auch die Möglichkeit, die Veränderung eines Kriteriums gegenüber dem vorigen Zyklus heranzuziehen. Wenn sich der Wert nicht mehr wesentlich verändert oder sogar wieder ansteigt, ist es nicht sinnvoll, mit der Iteration fortzufahren.

Der Betrag der Rauheit und die Abweichung von Ist und Soll der Volumina sind auch abhängig von der Maschenweite des Gitters. Generell wird die Rauheit umso geringer, je engmaschiger das Gitter ist. Die Erhaltung des Volumens wird aber nicht in jedem Fall besser, wenn die Rauheit sinkt. Bei ungünstigen Konstellationen, etwa bei der Einwohnerzahl in den Raumordnungsregionen der Bundesrepublik Deutschland, kann es vorkommen, dass der Durchschnitt der Abweichungen vom Volumen-Soll sehr gering ist. Bei einzelnen Regionen treten jedoch größere Abweichungen zwischen Ist und Soll auf, bedingt durch das sehr starke Gefälle in der Einwohnerdichte zwischen Agglomeration und Umland, etwa zwischen Berlin und den umliegenden Regionen.

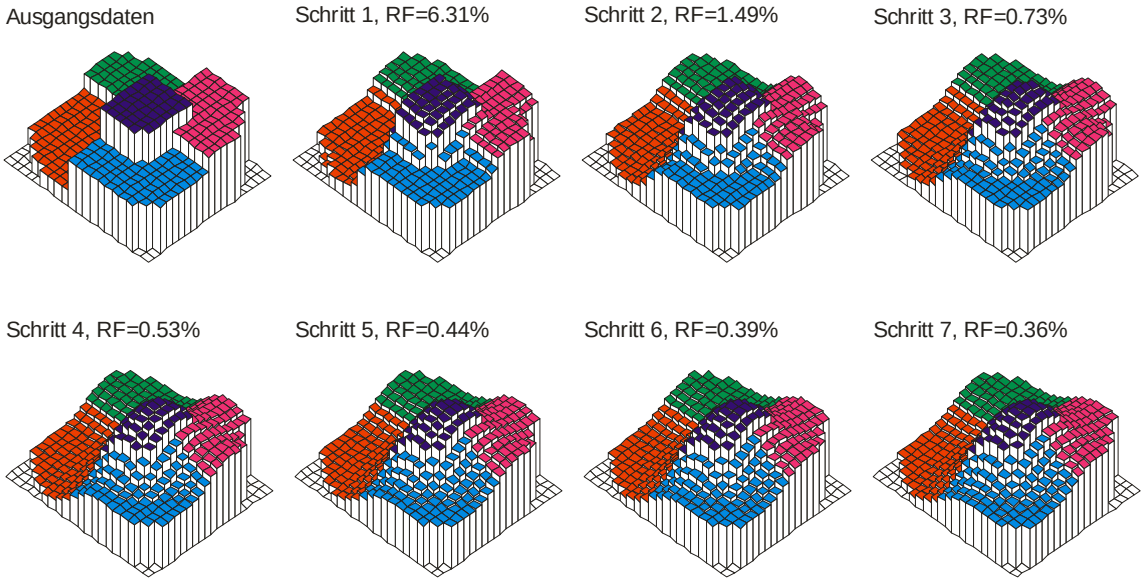


Abb. 4 Iterationsschritte bei einem Testdatensatz. RF: Maßzahl für die Rauheit

Die visuellen Eigenschaften der Oberfläche, wie Glätte und Form, werden nicht notwendigerweise durch diese Maßzahlen beschrieben. Das endgültige Urteil über die Qualität der Interpolation wird bei der visuellen Inspektion der Oberfläche gefällt. In diesem Fall hat der Anwender die Wahl, dass für manche Polygone entweder große Differenzen zwischen Soll- und Ist-Volumen entstehen oder einige Höhenwerte in manchen Polygonen unlogische Werte annehmen (siehe Abschnitt 3.2).

2.5 Sandstrand oder Steilküste

In Analogie zu den Küstenformen kann die die Außengrenze des Untersuchungsgebietes entweder als „Sandstrand“ oder als „Steilküste“ modelliert werden. Bei einem Sandstrand steigt der Höhenwert für die Oberfläche von einem Minimum auf der Grenze nach innen zu den Werten für das jeweilige Bezugspolygon an. Die Voreinstellung für die Höhe des Sandstrands kann zum Beispiel das Minimum der Datenwerte sein. Der Anwender kann aber auch eine Höhe für den Sandstrand vorgeben. Der Wert des Gradienten ist an dieser Stelle der Oberfläche gleich 0. Eine Steilküste hat senkrechte Wände, der Wert des Gradienten ist an der Grenze unendlich. Die Höhenwerte für die äußere Grenze liegen ungefähr auf der Höhe des angrenzenden Bezugspolygons (Abb. 5).

TOBLER (1979) stellt diese zwei möglichen Formen für die äußere Grenze in den mathematischen Zusammenhang der Lösung von elliptischen partiellen Differenzialgleichungen. Der „Sandstrand“ wird *Dirichlet-Bedingung* genannt, die „Steilküste“ *Neumann-Bedingung*.

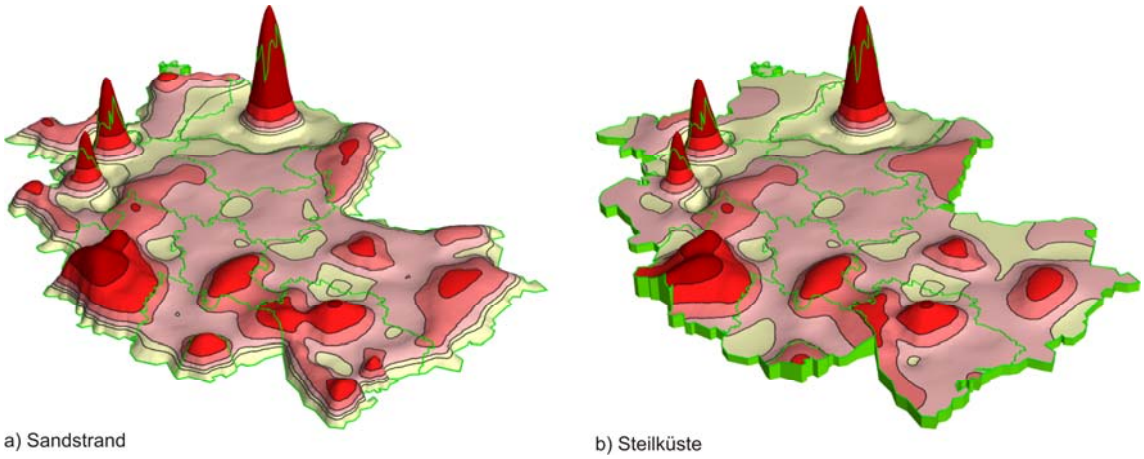


Abb. 5 Oberfläche der Einwohnerdichte 2005 mit den Rand-Typen „Sandstrand“ und „Steilküste“

Die äußere Grenze der interpolierten Oberfläche verläuft entlang der Gitterpunkte in der Nähe der Grenze des Untersuchungsgebietes. Die Strecken entlang des Gitters sind so lang wie die Gitterzellen beziehungsweise ihre Diagonale. Der Richtungswinkel der Strecken ist ein Vielfaches von 45 Grad beim Rechteckgitter und von 60 Grad beim Dreiecksgitter. Diese Grenze entlang der Gitter punkte erscheint – insbesondere bei großer Maschenweite des Gitters – gröber als die ursprüngliche Grenze. Beim „Sandstrand“ kann man den ursprünglichen Grenzverlauf durch Hinzufügen der Grenzpunkte wiederherstellen. Die z-Werte auf den gleichen Wert wie die äußeren Gitterpunkte gesetzt, also das Datenminimum oder ein vom Anwender ausgewählter Wert.

Bei der „Steilküste“ ist dieser Kniff mit der Wiederherstellung der originalen Grenze der nicht anwendbar. Es wäre möglich, die Höhe der Punkte auf der Grenze aus benachbarten Gitterwerten zu interpolieren und damit die Grenzpunkte auf die gleiche Höhe wie die Gitterpunkte nahe der Grenze zu bringen. Versuche zur Interpolation der Grenzhöhen haben bisher nicht zu überzeugenden Ergebnissen geführt. Der Grenzverlauf entlang bzw. auf den Gitterpunkten ist deshalb immer noch die beste Lösung.

Für welche Küstenform man sich entscheidet, hängt von mehreren Faktoren ab, etwa von den inhaltlichen Eigenschaften der dargestellten Variablen, dem geometrischen Verlauf der Grenze, der Form und Verteilung der Bezugspolygone oder auch von persönlichen Präferenzen. In den meisten Fällen

wird man die Steilküste bevorzugen. Wenn die Beibehaltung des originalen Grenzverlaufs ein wichtiges Kriterium für die Interpolation und Darstellung der Oberfläche ist, sollte besser anstatt des regelmäßigen Gitters ein unregelmäßiges Dreiecksnetz als Oberflächenmodell verwendet werden (siehe später).

Es ist meistens nicht sinnvoll, eine kontinuierliche Oberfläche zu interpolieren, wenn ein Untersuchungsgebiet nur ein Bezugspolygon enthält. Das trifft zu bei den deutschen Inseln in Nord- und Ostsee mit den Kreisen oder Raumordnungsregionen als Bezugseinheiten. Die geeignete Darstellung für die Inseln ist ein Prisma mit der Raumeinheit als Grundfläche und senkrechten Wänden. In der Software für die Interpolation und die 3D-Darstellung müssen entsprechende Vorkehrungen getroffen werden.

3 Probleme bei der volumenerhaltenden Interpolation im Gitter

Die volumenerhaltende Interpolation in der ursprünglichen Form hat einige Unzulänglichkeiten, von denen einige auf der Verwendung des regelmäßigen Gitters als Oberflächenmodell beruhen, andere aber unabhängig vom Datenmodell der Oberfläche sind.

3.1 Keine Interpolation bei Inseln mit einer Bezugseinheit

Die relativ kleine Fläche von Inseln im Allgemeinen und die langgestreckte Form der ostfriesischen Inseln im Besonderen führen dazu, dass die Insel-Polygone keine oder nur sehr wenig Gitterpunkte enthalten. Dieses Problem ist eigentlich irrelevant, denn die Inseln haben keine direkten Nachbarn mit einer gemeinsamen Grenze, deshalb ist kein Höhenausgleich zwischen Nachbarn zur Erzielung einer stetigen Oberfläche notwendig. Für die kartographische Darstellung werden die Inseln mit dem Wert der Bezugseinheit versehen. Das ist jedoch nicht bei allen regionalen Gliederungen und Variablen sinnvoll. Zum Beispiel ergibt der durchschnittliche Wert für die Baulandpreise pro Kreis ein völlig falsches Bild für die Insel Sylt, die zum Kreis Nordfriesland mit relativ niedrigen Baulandpreisen gehört. Rügen dagegen ist ein eigener Kreis, und Usedom und Fehmarn sind ausreichend groß, um das Volumen proportional zur Fläche zu verteilen oder den gleichen Höhenwert zuzuordnen. Die Inseln nicht mit in die Interpolation einzubeziehen ist natürlich kein Problem des regelmäßigen Gitters, sondern gilt auch für andere Datenmodelle von Oberflächen, etwa unregelmäßigen Dreiecksnetzen.

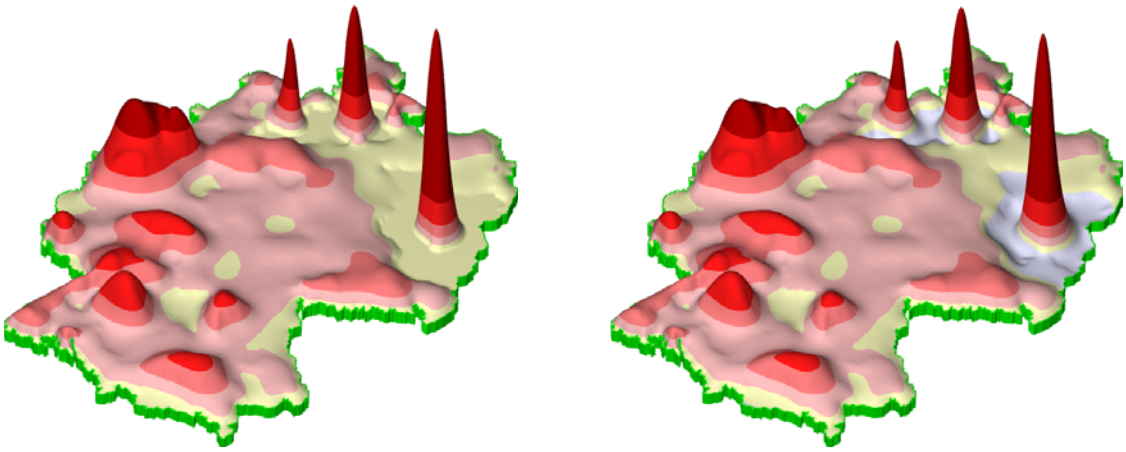
3.2 Ausgleich bei sehr großen Unterschieden zwischen benachbarten Einheiten

Wenn die Unterschiede im Höhenwert von direkt benachbarten Bezugseinheiten sehr groß sind, kann die verbleibende Abweichung zwischen dem Istwert des Volumens und dem Sollwert (Datenwert) so groß sein, dass sie nicht vernachlässigbar ist. Zum Beispiel sind die Einwohnerdichten bei den Stadtstaaten Berlin, Hamburg und Bremen in Relation zum Umland sehr hoch (Abb. 6). Bei der Glättung lassen sich die Höhenwerte innerhalb der Polygone des Umlandes nicht vollständig ausgleichen. Das Problem lässt sich nur lösen, wenn eigentlich unlogische Zustände zugelassen werden. Logisch ist in diesem Fall, dass die Anzahl der Einwohner und damit auch die Einwohnerdichte nicht negativ sein können.

Wird dieses Prinzip für alle Gitterpunkte in einer Bezugseinheit durchgehalten, ergeben sich große Abweichungen zwischen den Stadtstaaten und ihrem Umland, auch wieder abhängig von der Maschenweite. In Abbildung 6a ist die Einwohnerdichte für die Raumordnungsregionen dargestellt. Der Durchschnitt der Abweichungen zwischen Soll- und Istwert der Volumina liegt unter 1 Prozent. Die Abweichung einzelner Raumordnungsregionen um die Stadtstaaten beträgt aber bis zu 39 Prozent, bei einer Maschenweite des Gitters von 1 mm. Wird die Maschenweite verringert, sinkt der Wert für die Abweichungen, dafür steigt aber der Aufwand für die Nachbearbeitung und Darstellung der Oberfläche quadratisch.

Lässt man innerhalb eines Polygons auch negative Werte zu, sinken die Abweichungen aller Polygone unter einen vernachlässigbaren Wert. Das Volumen für die Bezugseinheit und der Durchschnitt der Höhenwerte bleiben aber immer im positiven Bereich und nahe dem Sollwert. In der Abbildung 6b kann man erkennen, dass um die Stadtstaaten herum die Oberfläche sichtbar eingedellt ist und einige Teile im negativen (blauen) Bereich liegen. Der Durchschnitt der Höhenwerte bzw. das Volumen für jede Bezugseinheit liegen aber sehr nahe beim Sollwert im positiven Bereich.

Das Problem der negativen Höhenwerte in einem Polygon ist nicht spezifisch für die Verwendung eines regelmäßigen Gitters, obwohl sich die Abweichung in gewissen Grenzen durch Verkleinerung der Maschenweite verringern lässt. Das gleiche Phänomen ergibt sich auch beim unregelmäßigen Dreiecksnetz.



a) ohne negative Werte b) mit negativen Werten

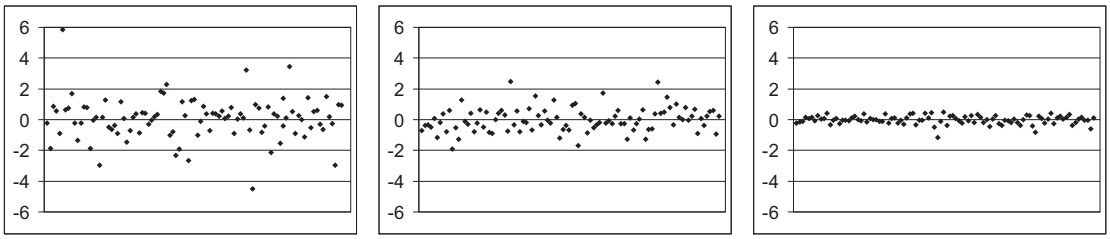
Abb. 6 Oberfläche der Einwohnerdichte. Links alle Höhenwerte positiv, rechts mit negativen Werten (blau).

3.3 Abweichungen im Flächeninhalt durch die Rasterung

Bei der Umlegung der Polygone auf das Gitter wird das Polygon nur so gut abgebildet, wie es die Maschenweite zulässt. Die Summe der Rechteck- oder Sechseck-Flächen (beim Dreiecks-Gitter) für eine Bezugseinheit ist nicht genau identisch mit dem Flächeninhalt des Polygons, der aus dem Polygon-Umriss berechnet wird. An der Polygongrenze entstehen kleine Fehler, die sich insgesamt zwar ausgleichen, für einzelne Polygone aber durchaus zu Problemen führen können.

In diesem Kontext wird nur der aus den Punkten der Polygongrenze berechnete Flächeninhalt betrachtet, ohne Rücksicht auf eine Generalisierung der Grenzlinien und die Eigenschaften der Projektion der sphärischen Koordinaten auf die Ebene. Für eine exakte Flächenbestimmung muss streng genommen ein flächentreuer Netzentwurf und nicht die für Übersichtskarten der Bundesrepublik Deutschland übliche konforme Kegelprojektion mit zwei Schnittkreisen verwendet werden. Weiterhin muss sichergestellt sein, dass die Grenzen nicht vereinfacht und auch Enklaven und Exklaven berücksichtigt sind. Das ist für die Praxis der Kartenerstellung nicht immer sinnvoll, denn für die Kartierung sollten die Grenzen aus wirtschaftlichen und visuellen Gründen generalisiert sein. Deshalb ist der aus den projektierten Grenzen berechnete Flächeninhalt meistens nicht identisch mit den Flächen der Bezugseinheiten, wie sie in der amtlichen Statistik ausgewiesen sind. In der Regel sind jedoch die Abweichungen vernachlässigbar klein.

In Abbildung 7 sind die Abweichungen zwischen den Flächeninhalten der Ausgangs-Polygone und den Punktflächen im Gitter dargestellt, die dem jeweiligen Polygon zugewiesen sind. Die Bezugseinheiten sind die 97 Raumordnungsregionen in Deutschland. Erwartungsgemäß verringert sich die Breite des Fehlerbandes bei abnehmender Maschenweite des Gitters. Der durchschnittliche Fehler ist bei allen Maschenweiten unter einem Prozent. Dieser Wert ist aber allein nicht aussagekräftig. Die möglichen Abweichungen müssen beachtet werden. Die Extremwerte der Abweichungen sind der erste Schritt zur Entdeckung und Beseitigung von unzulässig großen Fehlern bei der Rasterung von einigen Polygonen im Grenznetzwerk.



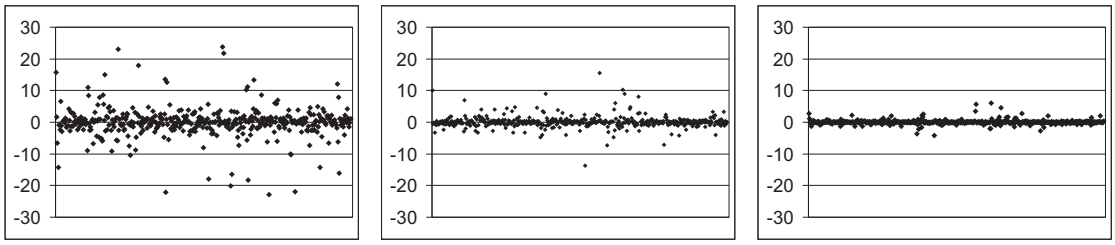
DX=0.15 DX=0.10 DX=0.05

Abb. 7 Abweichungen der Flächeninhalte (Prozent) in Abhängigkeit von der Maschenweite des Gitters (DX). Bezugseinheiten sind die Raumordnungsregionen.

Die durch die Rasterung verursachten Ungenauigkeiten machen sich insbesondere bemerkbar, wenn die Polygone der Bezugseinheiten sehr unterschiedliche Größen haben, wie etwa bei den Kreisen und den meist viele kleineren kreisfreien Städten in Deutschland. In den großen Kreisen liegen sehr viele Gitterpunkte, in den erheblich kleineren kreisfreien Städten wenige Gitterpunkte. Auch bei scheinbar ausreichenden Zellengrößen fallen manche Städte buchstäblich durch das Gitter, manchmal auch aufgrund ihrer geometrischen Form. Die Streudiagramme in Abbildung 8 zeigen die Spannweite in den Abweichungen für die Kreise und kreisfreien Städte. Der durchschnittliche Fehler für die drei Maschenweiten liegt unter 0,1 Prozent. Der relative Fehler für die Abweichung wird nach der Formel

$$Fehler = \frac{Istfläche * 100}{Sollfläche} - 100$$

berechnet, deshalb die negativen Werte bei den Minima. Im Streudiagramm mit der Maschenweite von 0,1 cm (links) sind die vier größten Ausreißer nicht enthalten, um die Diagramme vergleichbar zu machen. Auch angesichts der Unterschiede in den Größen und Einwohnerzahlen der Kreise in den Ländern spricht vieles dafür, für vergleichende Analysen *Kreisregionen* zu verwenden. Für die Kreisregionen wurden Kreise und kleinere kreisfreie Städte mit ihren Variablenwerten zu neuen Bezugseinheiten kombiniert.



Maschenweite	0.100	Maschenweite	0.050	Maschenweite	0.025
Mittelwert	-0.01	Mittelwert	-0.01	Mittelwert	0.00
Minimum	-22.94	Minimum	-13.69	Minimum	-4.12
Maximum	73.32	Maximum	15.55	Maximum	6.03

Abb. 8 Abweichungen für die Grenzen der Kreise und kreisfreien Städte. Man beachte den Unterschied in der Skalierung gegenüber der Abbildung 5.

3.4 Auswirkungen auf die Interpolation

Die nächstliegende Lösung zur Verringerung der Flächenfehler ist die Verkleinerung der Maschenweite, so dass auch kleine und ungünstig geformte Polygone eine Mindestanzahl von Gitterpunkten enthalten. Das erhöht aber den Aufwand für die Interpolation und vor allem für die graphische Darstellung und Weiterverarbeitung. Ein zu dichtes Gitter wirkt sich auch auf die Form der Oberfläche aus. Bei großen Polygonen werden die Teile, die weit von der Polygongrenze entfernt sind, im Glättungsschritt langsamer verändert als die Gebiete nahe der Grenze, ohne dass sich das in den Maß-

zahlen für die Rauheit oder die Volumenerhaltung auffällig bemerkbar macht. Es können Oberflächen mit relativ flachen Deckeln über den Polygonen (Tafelberge) anstatt von runden Hügeln und Tälern entstehen. Der Schluss liegt nahe, als Oberflächen-Modell anstatt eines regelmäßigen Gitters ein adaptives Netz mit veränderlicher Maschenweite zu nutzen.

4 Pyknophylaktische Interpolation im unregelmäßigen Dreiecksnetz

Ein alternatives Datenmodell für die Kodierung einer Oberfläche ist das unregelmäßige Dreiecksnetz, auch als TIN (*triangular irregular network*) bekannt. Das unregelmäßige Dreiecksnetz wurde für die Modellierung der Erdoberfläche entwickelt (PEUCKER et al. 1978). Die unregelmäßig verteilten Datenpunkte mit den Höhenwerten bilden die Knoten des Netzwerks. Die Knoten werden so durch Strecken verbunden, dass ein Netz von Dreiecken unterschiedlicher Größe und Form entsteht, das die Außenhaut der Oberfläche repräsentiert. Im CAD/CAM-Bereich wird diese Datenrepräsentation auch als FEM (*finite elements method*) oder allgemeiner als Netz (*mesh*) bezeichnet. Letzteres muss nicht nur aus Dreiecken bestehen.

Das unregelmäßige Dreiecksnetz ist *adaptiv*, das heißt, die Größe der Dreiecke und andere Eigenschaften können an die lokale Reliefenergie der Oberfläche angepasst werden. In flachen Regionen (wenig Reliefenergie) ist die Dichte der Stützpunkte kleiner, die Dreiecke sind größer und die Anzahl der Dreiecke ist geringer. In Bereichen mit hoher Reliefenergie (große und häufige Wechsel der Höhe) liegen die Stützpunkte dichter zusammen, die Dreiecke sind kleiner und zahlreicher. Alle Linien, auch Grenzlinien, können in der ursprünglichen Auflösung im TIN erhalten bleiben, ein wichtiger Gesichtspunkt für die volumenerhaltende Interpolation.

4.1 Konstruktion des Dreiecksnetzes

Die Konstruktion des unregelmäßigen Dreiecksnetzes kann nach unterschiedlichen Kriterien erfolgen. Allgemein wird die *Delaunay-Triangulation* als die optimale Lösung angesehen. Ein Dreiecksnetz entspricht einer Delaunay-Triangulation, wenn der Umkreis jedes Dreiecks keinen Eckpunkt eines anderen Dreiecks enthält. Das fertige Delaunay-Netz ist unabhängig von der Reihenfolge der Stützpunkte, was bei nicht bei allen Verfahren sichergestellt ist. Eine Reihe von Verfahren zur Konstruktion von Dreiecksnetzen nach dem Delaunay-Kriterium sind veröffentlicht und viele Programme für die wissenschaftliche Anwendung frei verfügbar (HJELLE UND DÆHLEN 2006, PRESS et al. 2007).

In einem Dreiecksnetz, das streng nach dem Delaunay-Kriterium konstruiert wird, ist nicht sicher, ob der Verlauf einer Linie, etwa einer Polygongrenze, auf den Dreiecksseiten durchgehend erhalten bleibt. Wenn die Erhaltung der Linie notwendig ist, wird das Dreiecksnetz durch den Tausch von diagonalen Kanten in dem Viereck aus zwei benachbarten Dreiecken modifiziert. Dann entspricht das Netz möglicherweise nicht mehr dem Delaunay-Kriterium, denn ein Stützpunkt kann innerhalb eines Dreiecks-Umkreises liegen.

Eine weitere Anpassung ist die Einbeziehung einer beliebigen (auch konkaven) Außengrenze anstatt der konvexen Hülle der Netzknoten. Das ist eigentlich der Regelfall bei raumwissenschaftlichen Untersuchungen. Abhängig vom Verlauf der Grenze kann nicht in allen Fällen das Delaunay-Kriterium streng eingehalten werden. Man spricht in diesen Fällen von einem eingeschränkten oder begrenzten Delaunay-Netz (*constrained Delaunay network*, CDT), um auf den Unterschied zum „echten“ Delaunay-Netz hinzuweisen.

4.2 Verdichtung des Grenznetzwerks

Die Ausgangsdaten für die volumenerhaltende Interpolation sind das Grenznetzwerk der Polygone und der Datenwert für jede Bezugseinheit. Bei der Anwendung eines unregelmäßigen Dreiecksnetzes müssen in jedes Polygon und damit in das gesamte Netz zusätzliche Punkte eingesetzt werden (*Steiner-Punkte*). Die zusätzlichen Punkte sind notwendig, um innerhalb des Polygons die Höhe variieren zu können, als Voraussetzung für eine annähernd glatte Oberfläche. Das Dreiecksnetz aus Grenzlinien und zusätzlichen Punkten muss bestimmten Kriterien genügen:

- Das Netz muss so dicht sein, dass auch unterschiedlich große Polygone ausreichend Punkte enthalten, um eine glatte Oberfläche zu erzielen.

- Dreiecke mit sehr spitzen (oder sehr stumpfen) Winkeln sind zu vermeiden, weil die extreme Abweichung vom gleichseitigen Dreieck arithmetische und visuelle Probleme verursacht.
- Die Dreiecke dürfen nicht zu klein sein, um arithmetische Probleme aufgrund der Darstellungsgenauigkeit von Zahlen in einem Computer zu vermindern.

Insbesondere für Modellrechnungen in der computergestützten mechanischen Konstruktion (CAD) und anderen Simulationsmethoden wurden Verfahren für die Verdichtung von Netzen entwickelt, die den genannten und noch weiteren Kriterien genügen. Diese Netze werden Qualitätsnetze (*quality meshes*) genannt (SHEWCHUK 2002).

Für die pyknophylaktische Interpolation werden Dreiecksnetze verwendet, die in der zweidimensionalen Bezugsebene ausgebreitet sind, aufgespannt von den Achsen x und y. Jedem Netzknoten ist ein z-Wert zugeordnet, an jedem Punkt der Oberfläche existiert nur ein z-Wert. Deshalb spricht man auch von 2½D-Oberflächen, was nicht ganz korrekt ist, denn die Anzahl der Dimensionen ist immer ganzzahlig. Ein „echtes“ 3D-Netzwerk mit Tetraedern, konstruiert mit Qualitätskriterien analog zum planaren Dreiecksnetz, wäre angesichts der relativ steilen Hänge in den Oberflächen besser geeignet. Solche tetraedalen Qualitätsnetze sollen für die pyknophylaktische Interpolation genutzt werden, sobald die entsprechende Software zur Verfügung steht.

4.2.1 Erzeugung von Qualitätsnetzen mit dem Programm *Triangle*

Neben kostenpflichtigen Modulen in kommerziellen CAD-Produkten sind einige Programme zur Erzeugung von Qualitätsnetzen frei verfügbar, zumindest für wissenschaftliche Anwendungen. Ein häufig angewendetes Programm ist *Triangle*, das hier für die Verdichtung des Grenznetzwerks eingesetzt wird (SHEWCHUK 1996, 1997a, 2005). In das Programm wurden mehrere Algorithmen für die Erzeugung des Dreiecksnetzes mit Einsetzen zusätzlicher Punkte integriert. Der Anwender kann die maximale Anzahl der zusätzlichen Punkte, die maximale Größe der Dreiecke, die Grenzwerte für die Innenwinkel der Dreiecke und noch andere Netzparameter durch Programm-Optionen steuern. Triangle konstruiert Delaunay-Netze mit verschiedenen Verfahren und mehreren Unterarten, auch mit einer konkaven äußeren Grenze (*constrained Delaunay network*). Weiterhin kann Triangle ein Voronoi-Diagramm erzeugen, also den dualen Graphen zum Delaunay-Netz. Das Voronoi-Diagramm ist auch als Dirichlet-Netz oder Thiessen-Polygone bekannt.

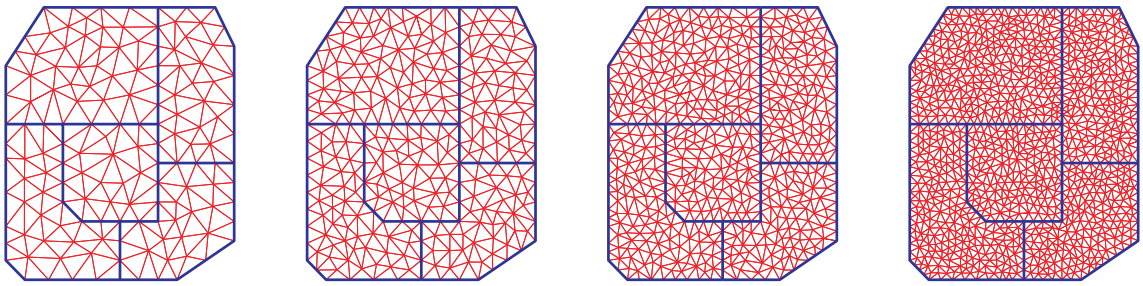
Durch die Verwendung von *exakter Arithmetik* im Programm Triangle werden einige Unzulänglichkeiten der Zahlendarstellung und Arithmetik in Computern umgangen, die bei der Erzeugung des Dreiecksnetzes zu Problemen führen können (SHEWCHUK 1996). Der Datenaustausch zwischen Anwendungsprogramm und dem Programm Triangle erfolgt entweder über Dateien oder über einen Prozedur-Aufruf mit Übergabe von Datenstrukturen, in denen die Ein- und Ausgabedaten enthalten sind. Das Programm liefert, wenn gewünscht, Angaben zum Gang der Optimierung, die Rechenzeiten für die Programmschritte und Statistiken zu den Eigenschaften des Netzes.

Der Verlauf der Grenzen der Bezugseinheiten bleibt auf jeden Fall im verdichteten Dreiecksnetz erhalten. Für die Verdichtung des Grenznetzwerks mit dem Programm Triangle werden die Grenzlinien in Strecken (*segments*) aufgelöst und dem Programm als Verweise auf die Punkte übergeben. In diese Strecken werden von Triangle eventuell zusätzliche Punkte eingesetzt, um die Kriterien für das Qualitätsnetz zu erfüllen, etwa die Größe der resultierenden Dreiecke und die minimalen Innenwinkel in den Dreiecken. Nach der Verdichtung des Netzes werden die Strecken wieder zu Linien zusammengesetzt. Ein *Maschengenerator* erzeugt aus den Linien die neuen Polygongrenzen, die dem Verlauf der alten Grenzen entsprechen. Die Zuordnung der neuen Polygone zu den Bezugseinheiten erfolgt mit einem Punkt-im-Polygon-Verfahren.

In Abbildung 9 sind Beispiele für die Verdichtung eines einfachen Netzwerks dargestellt. Die Mindestfläche für die Dreiecke verringert sich von 1 bis auf 0.125 (nicht maßstabsgerecht). Bei mehr als 99 Prozent aller Dreiecke sind die Innenwinkel größer als 30 Grad. In Abhängigkeit von den Voreinstellungen lässt sich die Verteilungen weiter steuern, zum Beispiel ein inhomogene Verteilung in den Flächen der Dreiecke oder die Vermeidung zusätzlicher Punkte in den Strecken der Flächengrenzen, ein Effekt, der in diesem Beispiel weniger sinnvoll ist.

Zusätzlich zu den Punkten im Innern der Polygone werden in die Strecken der Polygongrenzen neue Punkte eingesetzt, um spitze und stumpfe Innenwinkel nach Möglichkeit zu vermeiden. In Grenz-

netzwerken mit feiner Auflösung kann die Teilung der Strecken unterbleiben. Diese Option sollte man wählen, wenn zum Beispiel der ursprüngliche Verlauf der Grenzlinien ohne zusätzliche Punkte erhalten bleiben soll. Wenn die Grenzlinien ohnehin sehr fein aufgelöst sind, ist das Einsetzen zusätzlicher Punkte nicht notwendig. Allerdings werden in diesem Fall die Dreiecke mit spitzen oder stumpfen Innenwinkeln, die durch den Grenzverlauf bedingt sind, nicht aus dem Dreiecksnetz entfernt (siehe nächsten Abschnitt).



F=1.0 F=0.5 F=0.25 F=0.125

Abb. 9 Verdichtung eines Test-Grenznetzwerks mit dem Programm Triangle mit unterschiedlichen Mindestflächen. F: Flächeninhalt des größten Dreiecks (nicht maßstabsgerecht)

4.3 Datenreduktion in den Grenzlinien vor der Triangulierung

Die administrativen Grenzen der Bundesrepublik Deutschland, die vom Bundesamt für Kartographie (BKG) als Dateien bereit gestellt werden, sind so fein gegliedert, dass sie für den verwendeten Maßstab vereinfacht werden müssen. Wenn die originale Anzahl der Punkte in den Linien nicht verringert wird, entstehen in der unmittelbaren Nachbarschaft der Linien sehr viele kleine Dreiecke. Allein die Menge der Dreiecke erhöht den Aufwand für die Interpolation und Visualisierung unangemessen. Weiterhin können die Winkel im originalen Verlauf der Grenzen sehr spitz sein, weil lokal das Delaunay-Kriterium außer Kraft gesetzt wird. Diese spitzen Winkel bleiben im Dreiecksnetz erhalten und führen zusammen mit den sehr kleinen Dreiecksflächen zu arithmetischen Problemen, die sich in die volumenerhaltende Interpolation fortpflanzen können. Deshalb müssen die vom BKG bereitgestellten Verwaltungsgrenzen vor der Verwendung im Programm Triangle vereinfacht werden.

Für die Datenreduktion in den Grenzlinien der Raumordnungsregionen (Abb. 10) wurde die Editier-Funktion im GIS-Paket ArcGIS verwendet. Die Grenzlinien wurden mit einem Reduktionsfaktor von etwa 2500 m auf der Erdoberfläche vereinfacht. Die Datenreduktion muss sehr sorgfältig vorgenommen werden. Insbesondere ist auf sehr kurze Linien zu achten, die im Datensatz enthalten sein können. Sie sind am Bildschirm manchmal nur schwer erkennbar, sorgen aber für scheinbar unerklärlich viele kleine Dreiecke an bestimmten Stellen des Netzes. Der meistens verwendete Algorithmus für die Linienvereinfachung in ArcGIS (DOUGLAS und PEUCKER 1973) hat die Eigenschaft, langgestreckte Polygone zu Strichen zu verformen, zum Beispiel bei einigen Inseln. Deshalb darf die Datenreduktion nicht mit dem gleichen Faktor für alle Linien erfolgen, sondern selektiv nach der geometrischen Form, eventuell mit manueller Entfernung oder Verschiebung von einzelnen Linienpunkten.

Abbildung 10 zeigt zwei unterschiedliche Verdichtungsstufen des Grenznetzwerks der Raumordnungs-Regionen in der Bundesrepublik Deutschland. Im Bild links ist ein Netz mit unterschiedlich großen Dreiecken in Abhängigkeit von der Verteilung der Grenzlinien entstanden. Die Innenwinkel von mehr als 99 Prozent aller Dreiecke sind größer als 30 Grad. Auf der rechten Seite ist ein etwa ungefähr fünfmal dichteres Netz mit entsprechend kleineren Dreiecken abgebildet. Für die Interpolation kann das Netz noch dichter sein, um eine möglichst glatte Oberfläche zu erzielen, aber wieder nicht zu dicht, um lange Verarbeitungszeiten für die Graphikausgabe oder das Problem der flachen Polygondeckel zu vermeiden. In der Abbildung 11 sind Netze abgebildet, die mit unterschiedlichen Werten für den minimalen Innenwinkel und die maximale Fläche erzeugt wurden.

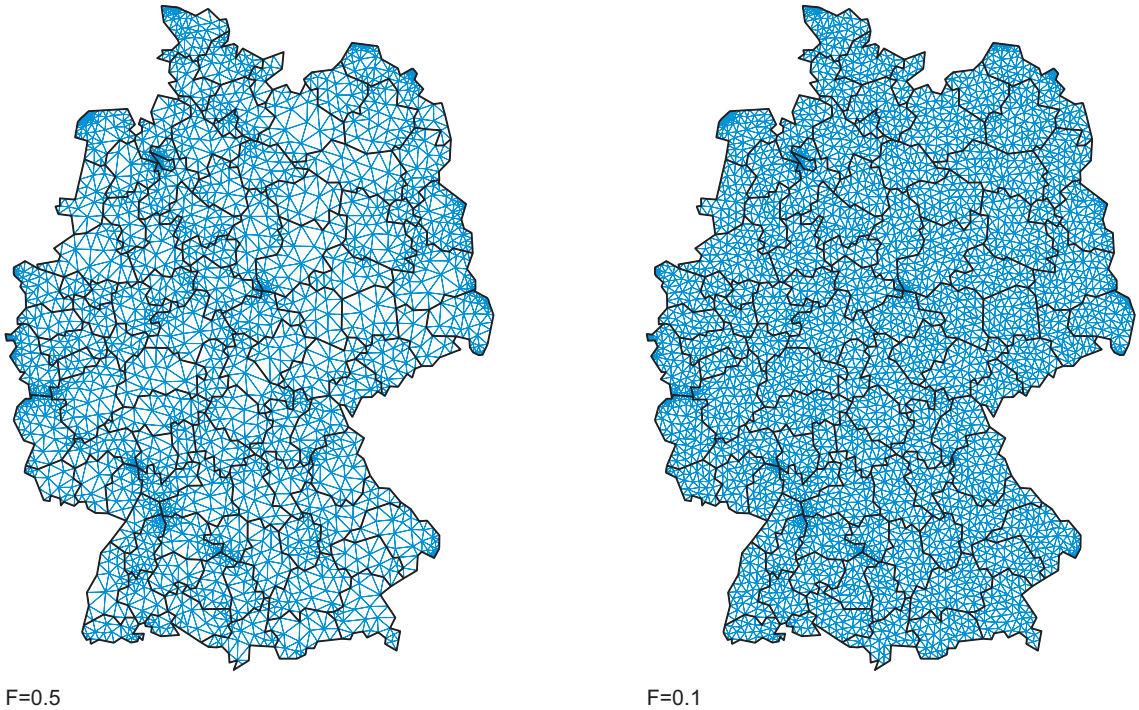


Abb. 10 Qualitätsnetze mit den Grenzen der Raumordnungsregionen. F ist die maximale Fläche der Dreiecke (nicht maßstabsgerecht).

Die Datenreduktion kann auch dazu führen, dass sich Grenzlinien sehr nahe kommen, sich berühren oder sogar schneiden. Durch Berührung oder Schnitt der Linien wird die Netztopologie unzulässig verändert. Beim Zusammensetzen der Liniensegmente zu den neuen, vereinfachten Polygonen der Bezugseinheiten kann es vorkommen, dass ein Punkt im alten Polygon, notwendig für die Identifikation, nicht mehr im neuen Polygon liegt. Dadurch kann der Maschengenerator die ursprüngliche Topologie des Grenznetzwerkes nicht mehr erzeugen. Der Algorithmus zur Berechnung von Mittelpunkten aus Polygonen in ArcGIS lässt einiges zu wünschen übrig, zumindest in der Version 9.1 von ArcGIS. Es kann vorkommen, dass die für die Identifikation der Polygone notwendigen Polygon-Mittelpunkte nach der Vereinfachung der Grenzlinien nicht mehr im neuen Polygon liegen. Die von ArcGIS erzeugten Mittelpunkte sollten, wenn notwendig, individuell von der Polygongrenze weg verschoben werden. Die nach der Linienreduktion mit ArcGIS erzeugten Polygone müssen sorgfältig darauf geprüft werden, ob die Zuordnung zu den Bezugseinheiten fehlerfrei ist.

5 Volumenerhaltende Interpolation im TIN

Das Verfahren der volumenerhaltenden Interpolation im unregelmäßigen Dreiecksnetz läuft im Prinzip so ab wie für das regelmäßige Gitter. An einigen Stellen sind leichte Modifikationen erforderlich, um den veränderten geometrischen Eigenschaften Rechnung zu tragen. Die Zuordnung von Punkten zu Polygonen ist nicht mehr eindeutig wie im regelmäßigen Gitter. Die Punkte im Dreiecksnetz, die auf einer Polygongrenze liegen, gehören zu mindestens zwei Polygonen, die Knoten im Grenznetzwerk – dort laufen mindestens drei Linien zusammen – auch zu mehr als zwei Polygonen.

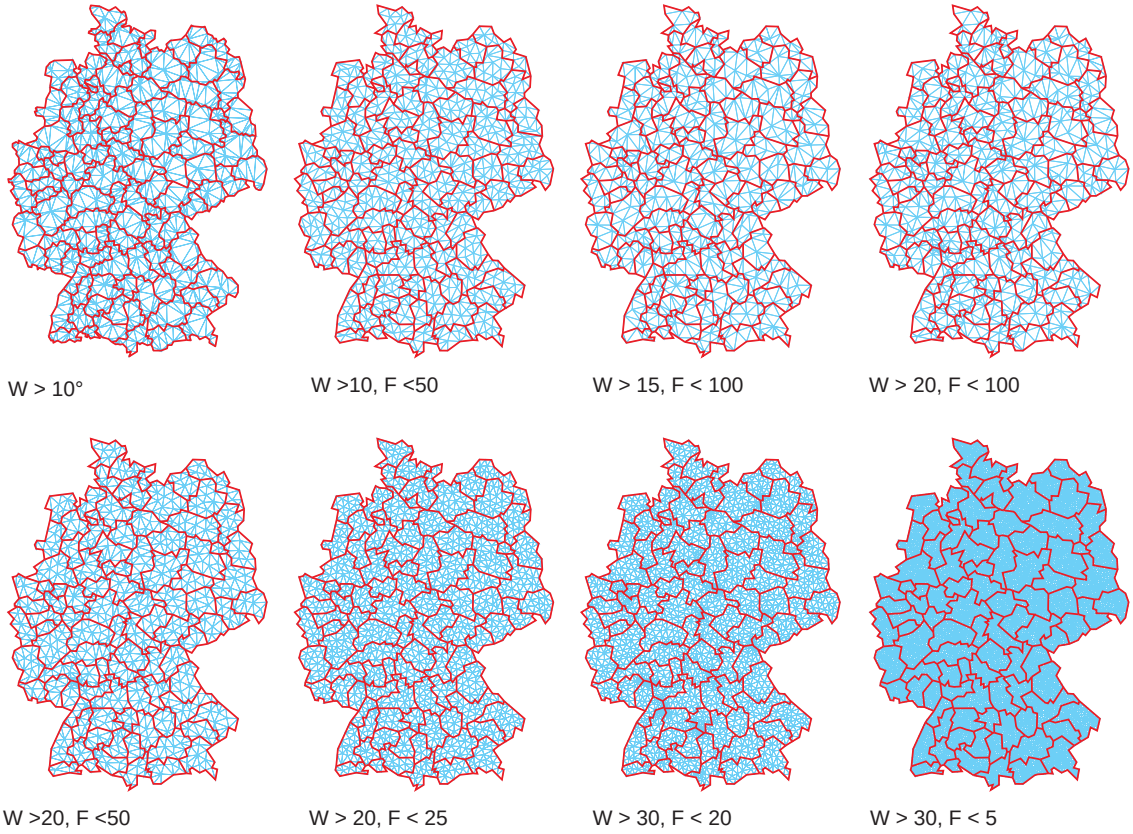


Abb. 11 Wirkung von Minimum für Innenwinkel (W) und maximale Dreiecksfläche (F)

5.1 Initialisierung

Das Grenznetzwerk wird nach der Vereinfachung mit dem Programm Triangle verdichtet. Die Punkte erhalten einen vorläufigen Höhenwert, im einfachsten Fall der Wert des jeweiligen Polygons. Für die Punkte auf den Polygongrenzen (Punkte mit Mehrfachzuordnung) wird der maximale Wert aus den jeweils benachbarten Bezugseinheiten eingesetzt. Die Voreinstellung der Netzknoten durch eine Interpolation mit den Mittelpunkten der Polygone und den Datenwerten ist möglich. Bei diesem Verfahren sind die Sprünge an den Polygongrenzen erheblich geringer, dadurch konvergiert das Iterationsverfahren vielleicht schneller. Andere Verfahren als die modifizierte Shepard-Interpolation (RENKA 1988, 1999) sind auch denkbar, etwa eine Kerndichte-Schätzung (*kernel density estimation*, KDE) oder Trend-Oberflächen.5.2 Glättung

In Analogie zum Rechenverfahren im regelmäßigen Gitter wird im Glättungsschritt der entfernungsgewichtete Mittelwert aus den z-Werten der Nachbarpunkte angewendet, nach der Formel (unter anderem bei SHEPARD 1968):

$$zn_i = \frac{\sum_{j=1}^{m} z_j * d_j^{-p}}{\sum_{j=1}^{m} d_j^{-p}}$$

zn_i	Durchschnitt für Punkt i
z_j	Wert der m nächsten Nachbarn
d_j	euklidische Entfernung zu den m Nachbarn
p	Exponent der Entfernung

Analog zur Interpolation im regelmäßigen Gitter sind die unmittelbaren Nachbarn die Punkte, die über eine Netzwerk-Kante mit dem Bezugspunkt direkt verbunden sind (erster Ring der Nachbarn, dunkelgrauer Bereich in Abb. 12). Die zweite Möglichkeit ist die Einbeziehung der mittelbaren

Nachbarn, der Nachbarn der direkten Nachbarn um den Bezugspunkt (zweiter Ring der Nachbarn, hellgrauer Bereich). In Analogie zur Gravitation wird bei Interpolationsrechnungen meistens der Exponent *p* bei der Anwendung in Interpolationsverfahren auf den Wert 2 gesetzt. Tobler schlägt vor, in diesem Fall eine lineare Abhängigkeit zu verwenden, indem der Exponent auf den Wert 1 gesetzt wird (TOBLER 2000).

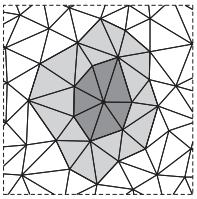


Abb. 12 Bereiche für die Mittelwertbildung im unregelmäßigen Dreiecksnetz. Dunkelgrau: unmittelbare Nachbarn; hellgrau: Nachbarn der Nachbarn.

Bei der pyknophylaktischen Interpolation im regelmäßigen Gitter ist ein Relaxationsfaktor mit dem Betrag 0.25 ein guter Erfahrungswert. Die Testrechnungen im unregelmäßigen Dreiecksnetz haben ergeben, dass manchmal die Oberflächen glatter werden, wenn der Relaxationsfaktor auf einen kleineren Wert gesetzt wird, etwa auf 0.1. Ein kleiner Relaxationsfaktor kann auch zur künstlichen Verlangsamung des Interpolationsprozesses dienen, um zum Beispiel eine ausreichend große Zahl von Einzelbildern für eine Animation bereit zu stellen.

5.3 Höhen-Ausgleich zur Volumenerhaltung

Die Korrektur der Höhenwerte zur Erzwingung der Volumenerhaltung wird im Prinzip nach dem gleichen Verfahren wie bei der Anwendung des regelmäßigen Gitters ausgeführt. Für den Abbruch der Iteration gelten die gleichen Kriterien wie bei der Anwendung des regelmäßigen Gitters.

5.4 Küstenform

Die Realisierung der beiden Küstenformen ist beim unregelmäßigen Dreiecksnetz einfacher als mit dem regelmäßigen Gitter als Oberflächenmodell. Der ursprüngliche Verlauf der äußeren Grenze bleibt erhalten, die Höhenwerte sind identisch mit den z-Werten im TIN. In Abbildung 11 kann man sehen, dass die Grenzlinie in der ersten Version mit gleitenden Übergängen verläuft, die der zweiten Version treppenförmig ist.

6 Beispiele für die Interpolation von Oberflächen im TIN

Die Methode der pyknophylaktischen Interpolation im regelmäßigen Gitter und im TIN wurde für verschiedene Indikatoren aus der Laufenden Raumbeobachtung des BBR angewendet.

6.1 Bruttoinlandsprodukt in den Kreisregionen

In Abbildung 13 ist eine Oberfläche des Bruttoinlandsprodukts pro Erwerbstätigen dargestellt, die aus Kreisregionen (Landkreise einschließlich kleinerer Städte) interpoliert wurde. Die Bezugseinheiten sind kleiner, deshalb hat die Oberfläche mehr regionale Variationen in der Höhe, mit zum Teil großen Unterschieden bei benachbarten Kreisen. Die durchschnittliche Abweichung der Soll- und Ist-Volumina liegt unter 0,1 Prozent. Die Oberfläche besteht aus etwa 147 000 Dreiecken, ohne die Dreiecke für die durch 3D-Röhren repräsentierten Grenzlinien und die aus True-Type-Schriften extrudierten Textketten. Abbildung 14 ist ein Bild des 3D-Modells der Oberfläche, das mit Verfahren des *rapid prototyping* gefertigt wird (RASE 2007).

6.2 Bruttoinlandsprodukt in den Raumordnungsregionen

Die Abbildung 14 zeigt eine Oberfläche des Bruttoinlandsprodukts pro Erwerbstätigen als kontinuierliche Oberfläche mit den Raumordnungsregionen als Bezugseinheiten. Das Bruttoinlandsprodukt (BIP) umfasst alle im Inland produzierten Güter und Dienstleistungen. Das Bruttoinlandsprodukt je Erwerbstätigen wird im Allgemeinen als Maß für die ökonomische Wettbewerbsfähigkeit von Regionen verwendet. Die relative Rauheit der interpolierten Oberfläche liegt unter 0,002 Prozent, die mittlere Abweichung im Volumen ist 0,4 Prozent.

Abb. 13 Bruttoinlandsprodukt 2004. Bezugseinheiten sind die Raumordnungsregionen der Bundesrepublik Deutschland.

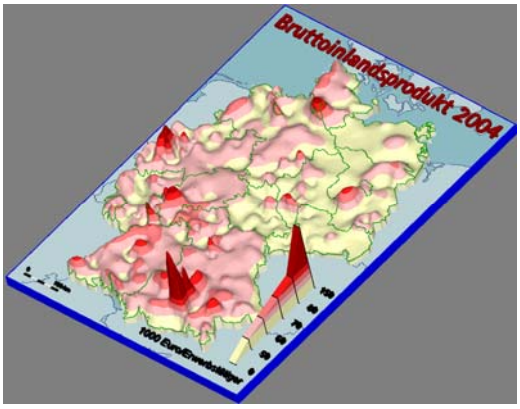


Abb. 14 Bruttoinlandsprodukt 2004, Kreisregionen (Kreise und kleinere kreisfreie Städte zusammengefasst). Die Oberfläche wird als reales Modell dargestellt, das auf einem 3D-Drucker hergestellt wird.

6.3 Preise für baureifes Land

Die durchschnittlichen Preise für baureifes Land (Baulandpreise) für das Jahr 2005 in €/m² beruhen auf den Daten der Gutachterausschüsse für die Kreise und kreisfreien Städte der Bundesrepublik Deutschland, soweit vorhanden. Wenn diese Informationen nicht verfügbar sind, werden die Daten der Kaufwerte-Statistik herangezogen. Die Daten wurden von den Kreisen und kreisfreien Städten angefordert und im Bundesamt für Bauwesen und Raumordnung zusammengestellt (Abb. 15).

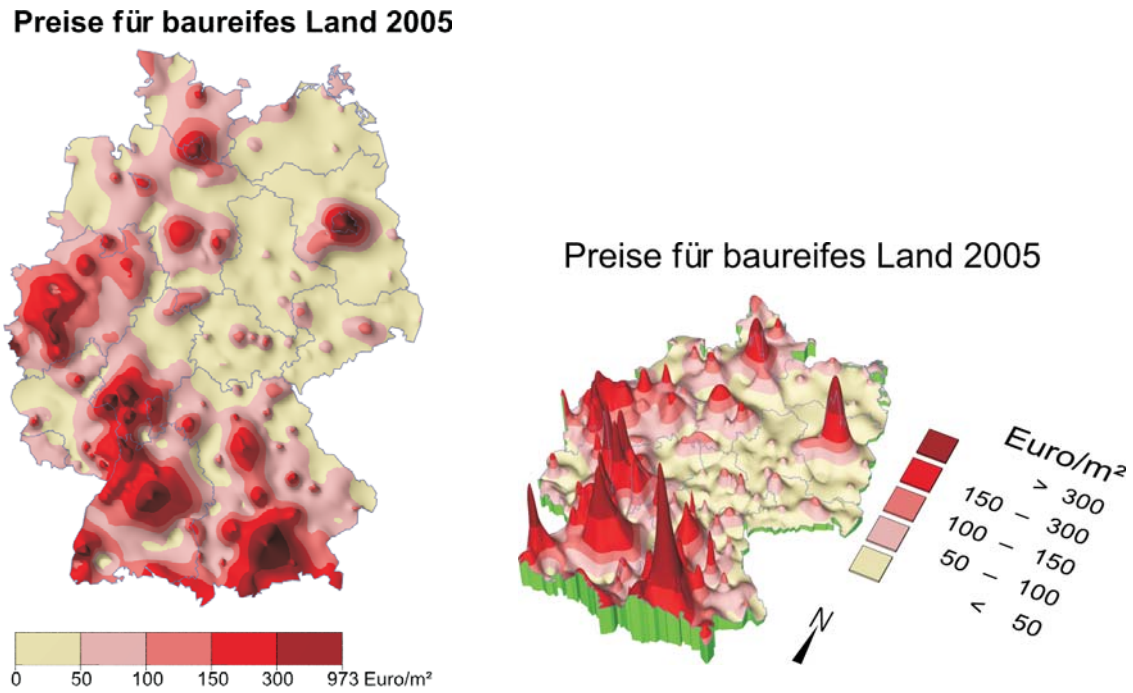


Abb. 15 Durchschnittliche Preise für baureifes Land in €/m² für das Jahr 2005. Links: Aufsichtsprojektion mit simulierter Beleuchtung aus NW. Rechts: perspektivische Darstellung.

6.4 Einwohnerdichte

In den Abbildungen 5, 12 und 16 sind Oberflächen der Einwohnerdichte dargestellt. Das Volumen über dem Polygon der Bezugseinheit entspricht der absoluten Zahl der Einwohner, in den durch Rasterisierung und Interpolation bedingten Fehlermargen. Der Durchschnitt der z-Werte in einer Bezugseinheit ist gleich der Einwohnerdichte, mit einer sehr geringen Abweichung.

7 Fazit und Ausblick

Die Methode der pyknophylaktischen (volumenerhaltenden) Interpolation erzeugt aus polygonbezogenen Daten stetige (glatte) Oberflächen mit weitgehender Erhaltung des Volumens in jeder Bezugseinheit. Die Oberflächen eignen sich besser für die perspektivische oder echt-dreidimensionale Darstellung als 3D-Choroplethenkarten. Der Anwender kann entweder ein regelmäßiges Gitter oder ein Netz aus unregelmäßigen Dreiecken als Datenmodell für die Oberfläche verwenden. Mit einem adaptiven unregelmäßigen Dreiecksnetz (TIN) als Datenmodell für die Oberfläche kann der Verlauf der Polygongrenzen in der Oberfläche erhalten bleiben.

7.1 Regelmäßiges Gitter oder unregelmäßiges Dreiecksnetz?

Die implizite Topologie des regelmäßigen Gitters erlaubt schnellere Zugriffe auf die Daten, deshalb sind die Rechenzeiten für die volumenerhaltende Interpolation in der Regel kürzer als mit einem unregelmäßigen Gitter aus Dreiecken. Die Geometrie der Grenzlinien wird aber auf die Auflösung des Gitters vergröbert. Wird ein unregelmäßiges Netz von Dreiecken (TIN) verwendet, bleibt die Geometrie der Polygongrenzen erhalten, dafür sind die Rechenzeiten etwas länger. Bei vergleichbarer Auflösung in beiden Datenmodellen sind mit dem bloßen Auge kaum Unterschiede in der Oberfläche erkennbar (Abb. 16). Aufgrund der adaptiven Eigenschaften des TIN ist theoretisch die Anzahl der Dreiecke für die Oberfläche etwas niedriger. In der Praxis spielt dieser Vorteil aber so gut wie keine Rolle.

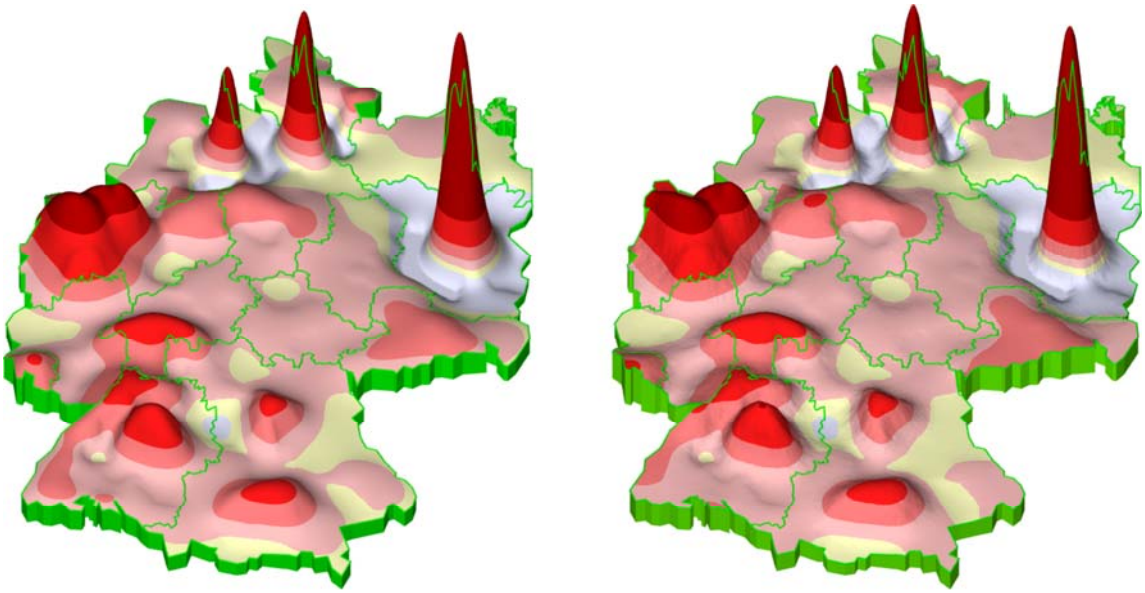


Abb. 16 Oberfläche der Bevölkerungsdichte. Links: Interpolation im regelmäßigen Rechteckgitter; rechts: Interpolation im unregelmäßigen Dreiecksnetz (TIN)

Der Anwender hat die Wahl, welches Datenmodell er für die Modellierung der Oberfläche verwenden möchte. Generell kann man folgende Empfehlungen geben:

- Weichen die Größen der Bezugseinheiten nicht wesentlich voneinander ab, sollte ein regelmäßiges Gitter verwendet werden. Ein Beispiel für eine solche Raumgliederung mit etwa gleich großen Einheiten sind die Raumordnungsregionen in der Bundesrepublik.
- Bei sehr großen Abweichungen in der Größe der Polygonflächen oder ungünstigen geometrischen Formen der Polygone kann es vorkommen, dass die Polygone nicht oder mit einer zu kleinen Anzahl von Punkten auf das Gitter abgebildet werden. Auf der administrativen Ebene der Kreise in der Bundesrepublik sind die Unterschiede in der Fläche von Landkreisen und kreisfreien Städten oft sehr groß. Eine Verfeinerung des Gitters hilft nur bis zu einem gewissen Grad. Bei sehr kleinen Maschenweiten neigt das Interpolationsverfahren bei großen Polygonen zur Ausformung von Plateaus.
- Das unregelmäßige Dreiecksnetz (TIN) kommt zur Anwendung, wenn die Polygongröße sehr unterschiedlich ist und sehr unregelmäßige Polygonformen vorkommen.
- Nur mit einem TIN als Oberflächenmodell bleibt der Verlauf der Grenzlinien auf den Grenzen der Dreiecke im Qualitätsnetz erhalten.
- Auf der anderen Seite muss vor der Verdichtung des Grenznetzwerks durch ein Qualitätsnetz unbedingt eine dem Darstellungsmaßstab angemessene Vereinfachung der Grenzlinien erfolgen. Sonst entstehen sehr viele kleine Dreiecke aufgrund der hohen Linienauflösung. Abgesehen von höheren Rechenzeiten wird dadurch möglicherweise auch das Ergebnis der Iteration beeinflusst, etwa durch arithmetische Fehler bei sehr kleinen Dreiecken aufgrund der beschränkten Genauigkeit der Zahlendarstellung. Für die Interpolation im regelmäßigen Gitter spielt die Auflösung der Grenzlinien keine Rolle, abgesehen von der erhöhten Datenmenge bei der Ausgabe und Darstellung.

Die Rechenzeiten auf dem Stand der Technik entsprechenden Rechnern sind nicht sehr hoch, so dass verschiedene Varianten für das Datenmodell und die Auflösung ausprobiert werden können. Es empfiehlt sich in jedem Fall, die Ergebnisse der Interpolation nicht nur generell, sondern für jede Bezugseinheit zu prüfen, etwa die Anzahl der Gitterpunkte in jeder Einheit bei einem regelmäßigen Gitter, oder die Abweichungen des Volumens bzw. der Höhe der Einheit vom Sollwert.

Dreidimensionales Qualitätsnetz

Wenn man die Oberflächen in Abbildung 16 interaktiv auf dem Bildschirm vergrößert, kann man erkennen, dass die Oberfläche mit dem regelmäßigen Gitter glatter wirkt als die Oberfläche mit dem TIN-Datenmodell. An den Maßzahlen für die Rauheit und die Volumenerhaltung ist dieser visuelle Unterschied kaum erkennbar.

Das Qualitätsnetz, das für die zusätzlichen Punkte in den Polygonen benutzt wird, ist zweidimensional. An steilen Hängen der Oberfläche entsprechen die dreidimensionalen Dreiecke nicht mehr den Qualitätskriterien, die für das zweidimensionale Netz gewählt wurden. Die Innenwinkel der Dreiecke können kleiner werden als das ausgewählte Minimum, die Dreiecksflächen das gesetzte Maximum überschreiten. Ob und wie durch Anwendung eines 3D-Netzes (Tetraeder-Netz) die Interpolation und die visuelle Qualität der Oberflächen verbessert werden kann, muss weiter untersucht werden. Vielleicht ergeben sich auch durch die Modifikation der Verfahren für die Mittelwertbildung und des Volumenausgleichs zusätzliche Verbesserungen.

8 Benutzte Software

8.1 Interpolation mit KONKAR

Die pyknophylaktische Interpolation wird vom eigenen Programm KONKAR ausgeführt, sowohl die Version mit dem regelmäßigen Gitter (Rechteck- und Dreiecksnetz) als auch die Version mit dem unregelmäßigen Dreiecksnetz. Die ursprüngliche Version der gitterbasierten Interpolation wurde nach ein BASIC-Programm von Waldo Tobler programmiert. Die aktuelle Version von KONKAR ist in Fortran 90 programmiert, mit Aufruf von C/C++-Programmen. Das Programm KONKAR speichert die Oberfläche in Dateien mit verschiedenen Formaten für die Verarbeitung in weiteren Programmen. Die Geometrie- und Sachdaten sind in Dateien im Shapefile-Format des GIS-Paketes ArcGIS der Firma ESRI gespeichert, die von KON´KAR gelesen werden. Die Vereinfachung der Grenzlinien wird mit ArcGIS vorgenommen.

8.2 Darstellung

Die perspektivischen Darstellungen in den Abbildungen dieses Textes wurden mit dem Programm POVRay, Version 3.6 und 3.7 (beta) ausgeführt. POVRay ist eine Software für Raytracing-Anwendungen, in der sehr viele Optionen für fotorealistische Darstellungen zur Verfügung stehen. Das Programm ist für unterschiedliche Betriebssysteme verfügbar und die Nutzung für wissenschaftliche Anwendungen kostenfrei (www.povray.org). KONKAR erzeugt die Dateien für POVRay wie auch die Dateien, die für den Aufbau von 3D-Modellen auf einem 3D-Drucker und für Glasbinnengravur verwendet werden (RASE 2006, 2007).

Für die Darstellung als dreidimensionales Modell (perspektivische Zeichnung mit POVRay oder als reales Modell) ist es notwendig, den 2D-Linien für Grenzen und Situation die exakte Höhe der Dreiecke hinzuzufügen. Der schnelle Zugriff auf die im Verlauf der Linie liegenden Dreiecke erfolgt über eine R-Tree-Datenstruktur.

8.3 Programm Triangle für die Erzeugung von Qualitätsnetzen

Für die Generierung der Qualitätsnetze als Grundlage für die volumenerhaltende Interpolation im TIN wird wie schon erwähnt das Programm Triangle (V1.6) von Jonathan Shewchuk eingesetzt (SHEWCHUK 2005). Bisher wurde Triangle als selbständiges Programm genutzt, das von KONKAR aufgerufen wird. Der Datenaustausch zwischen KONKAR und Triangle erfolgte mit formatierten Dateien nach den Spezifikationen von Triangle. Die aktuelle Version von KONKAR ruft die Funktion *triangulateio* von Triangle als Prozedur auf und tauscht die Daten über Datenstrukturen aus. Damit wird das aufwendige Schreiben und Lesen der formatierten Dateien vermieden und die Erzeugung der Qualitätsnetze beschleunigt.

8.4 ArcGIS-Script

Für die pyknophylaktische Interpolation in einem regelmäßigen Gitter ist ein Python-Script für das GIS-Paket ArcGIS (V 9.2) verfügbar (arcscripts.esri.com/details.asp?dbid=15136). Der Script wurde von David Lamb nach dem Vorbild eines Programms portiert, das Leopold Riedl in der Sprache Avenue für Arcview 3.2 geschrieben hat (arcscripts.esri.com/details.asp?dbid=10918). Für die Aus-

führung des Python-Scripts ist die ArcGIS-Erweiterung *Spatial Analyst* erforderlich. Der Test hat ergeben, dass die Interpolation auch bei relativ grober Auflösung sehr viel Zeit beansprucht. Wichtige Statistiken fehlen, die für die Bewertung der Oberflächenqualität (Glätte, Erhaltung des Volumens) und der Kontrolle des Ausgleichs zwischen benachbarten Einheiten unbedingt notwendig sind.

Acknowledgement

I would like to thank the originator of the pycnophylactic interpolation method, Waldo Tobler, for his continuing support and advice, and Jonathan Shewchuk for his kindness to allow the scientific community to use the Triangle program.

9 Literatur

BUCHROITHNER, M. F. (2007) Echtdreidimensionalität in der Kartographie: Gestern, heute und morgen. Kartographische Nachrichten, 5/2007, 239–248

DOUGLAS, D., PEUCKER T. K. (1973) Algorithms for the reduction of the number of points required to represent a digitized line or its caricature. The Canadian Cartographer, Vol. 10, No. 2, December 1973, 112–122

DYN, N, WAHBA, G, WONG, WH (1979) Comment to Waldo Tobler's smooth pycnophylactic interpolation for geographical regions. Journal of the American Statistical Association, Vol. 74, No. 357, 530-535

GRÜNDEMANN, T., BUCHROITHNER, M. F., HABERMANN, K. (2006) Multitemporale und echtdreidimensionale Hartkopie-Visualisierungen von Geodaten. In: Kriz/Cartwright/Pucher/Kinberger (Hrsg.) Kartographie als Kommunikationsmedium - Cartography as a Communication Medium. Wiener Schriften zur Geographie und Kartographie, Bd.17, 270–276

HARBAUGH, JW, MERRIAM, DF (1968) Computer applications in stratigraphic analysis. John Wiley & Sons, New York

HJELLE, Ø., DÆHLEN, M. (2006) Triangulations and applications. Springer, Heidelberg

PEUCKER, T. K. , FOWLER, R. J., LITTLE, J. J., MARK, D. (1978) Digital representation of three-dimensional surfaces by triangulated irregular networks (TIN). Proceedings Digital Terrain Modeling Symposium, May 1978, ASP, 516–540

PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., FLANNERY, B. P. (2007) Numerical recipes. The art of scientific computing, 3rd edition. Cambridge University Press

RASE, W.-D. (1998) Modellierung und Darstellung von immateriellen Oberflächen. Forschungen Band 89, Bundesamt für Bauwesen und Raumordnung, Bonn

RASE, W.-D. (2003) Von 2D nach 3D – Perspektivische Darstellungen, Stereogramme, reale Modelle. In: Kartographische Schriften, Band 7: Visualisierung und Erschließung von Geodaten. Kirschbaum-Verlag, Bonn, 13–24
http://www.wdrase.de/Von2Dnach3D.pdf

RASE, W.-D. (2006) Physical models of GIS objects by rapid prototyping methods. In: Wiener Schriften zur Geographie und Kartographie, Band 17, Wien 2006, 286–291
http:://www.wdrase.de/GICON2006_RaseSmall.pdf

RASE, W.-D. (2007) Verfahren zur Herstellung von dreidimensionalen kartographischen Modellen. In: Tzschaschel/Wild/Lentz (Hrsg.) Visualisierung des Raumes: Karten machen – die Macht der Karten. Forum Institut für Länderkunde Leipzig, Heft 6/2007, 215–228
http://www.wdrase.de/3DModelleLeipzig2006.pdf

RASE, W.-D. (2007) Volumenerhaltende Interpolation aus polygonbezogenen Daten in einem unregelmäßigen Dreiecksnetz (TIN). In: Strobl, Blaschke, Griesebner (Hrsg.) Angewandte Geoinformatik 2007. Beiträge zum 19. AGIT-Symposium Salzburg. Wichmann, Heidelberg, 595–604
http://www.wdrase.de/VolumenerhaltendeInterpolationAGIT2007.pdf

RASE, W.-D. (2009) Visualization of polygon-based data as a continuous surface. Manuscript. http://www.wdrase.de/VisualPycnoInterEngl.pdf

RENKA, R. J. (1988) Algorithm 660: QSHEP2D, Quadratic Shepard method for bivariate interpolation of scattered data. ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 14, No. 2, June 1988, 149–150

RENKA, R. J. (1999) Algorithm 790: CSHEP2D: Cubic Shepard method for bivariate interpolation of scattered data. ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 25, No. 1, March 1999, 70–73

SHEPARD, D. (1968) A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data. Proceedings ACM National Conference 1968, 517–524

SHEWCHUK, J. R. (1996) Triangle: Engineering a 2D quality mesh generator and Delaunay triangulator. In: Lin, M. C., Manocha, D. (ed.) Applied Computational Geometry: Towards Geometric Engineering. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 1148, 203–222
http://www.cs.berkeley.edu/~jrs/papers/triangle.pdf

SHEWCHUK, J. R. (1997a) Delaunay refinement mesh generation. Ph.D. thesis, Technical Report CMU-CS-97-137, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA
http://www.cs.cmu.edu/~quake-papers/delaunay-refinement.pdf

SHEWCHUK, J. R. (1997b) Adaptive precision floating-point arithmetic and fast robust geometric predicates. Discrete and Computational Geometry 18(3), 305–363
http://www.cs.berkeley.edu/~jrs/papers/robustr.pdf

SHEWCHUK, J. R. (2002) What is a good linear element? Interpolation, conditioning, and quality measures. Proceedings 11th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, 115–126
http://www.cs.berkeley.edu/~jrs/papers/elem.pdf

SHEWCHUK, J. R. (2005) Triangle. A two-dimensional quality mesh generator and Delaunay triangulator. http://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html

SHEWCHUK, J. R. (200x) General-dimensional constrained Delaunay and constrained regular triangulations I: Combinatorial properties. To appear in Discrete and Computational Geometry.
http://www.cs.berkeley.edu/~jrs/papers/cdtj1.pdf

TOBLER, W. R. (1979) Smooth pycnophylactic interpolation for geographical regions. Journal of the American Statistical Association, Vol. 74, No. 357, 519–535

TOBLER, W. R. (2000), persönliche Kommunikation

Letzte Änderung: 9. April 2009